EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 3

1. Pour $z \neq i$, $\dfrac{z-1}{iz+1} = 1+2i \Leftrightarrow z-1 = (1+2i)(iz+1) \Leftrightarrow z-1 = (-2+i)z+1+2i$

$$\Leftrightarrow (3-i)z = 2+2i \Leftrightarrow (3+i)(3-i)z = (3+i)(2+2i)$$

$$\Leftrightarrow 10z = 4+8i \Leftrightarrow z = \frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$$

2. a) $|iz+1| = |i(z-i)| = |i|.|z-i| = |z-i|$.

b) Pour $z \neq i$, $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-1}{iz+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z-1|}{|iz+1|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z-1|}{|z-i|} = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$

$\Leftrightarrow AM = BM$.

Donc l'ensemble (E_1) est la médiatrice du segment [AB].

3. a) Si z = x + iy , avec (x, y) $\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ alors

$$Z = \frac{(x+iy)-1}{i(x+iy)+1} = \frac{(x-1)+iy}{(1-y)+ix} = \frac{[(x-1)+iy][(1-y)-ix]}{x^2+(1-y)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(1-y)+xy+i[-x(x-1)+y(1-y)]}{x^2+(1-y)^2} = \frac{x+y-1+i[-x^2+x-y^2+y]}{x^2+(1-y)^2}$$

D'où $\quad Re(Z) = \dfrac{x-y+1}{x^2+(1-y)^2}$ et $\quad Im(Z) = \dfrac{-x^2-y^2+x+y}{x^2+(1-y)^2}$.

b) Z est réel $\Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-y^2+x+y = 0 \\ (x,y) \neq (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+y^2-y = 0 \\ (x,y) \neq (0,1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\ (x,y) \neq (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ (x,y) \neq (0,1) \end{cases}$$

L'ensemble (E_2) est donc le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

privé du point B.

c) Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(Z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1 = 0 \\ (x,y) \neq (0,1) \end{cases}$.

L'ensemble (E_3) est donc la droite d'équation x – y + 1 = 0 privé du point B.

Qarray.tn -Agra Blech- Qarray.tn